DURÉE : 4 heures

On désigne par $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels, par $\mathbb{R}$ le corps des nombres réels et par $\mathbb{R}_+$ l'ensemble des nombres réels positifs ou nuls.

Tous les espaces vectoriels considérés sont réels.

Si A est une partie non vide d'un espace vectoriel E, et a un point de E on dira que a est un barycentre de A s'ils existent p entier $\geqslant 1$, $(a_1, \ldots, a_p) \in A^p$ et $(\theta_1, \ldots, \theta_p) \in \mathbb{R}_+^p$ tels que

$$a = \sum_{i=1}^{p} \theta_i a_i \qquad \text{et} \qquad \sum_{i=1}^{p} \theta_i = 1 ;$$

on notera $\Gamma(A)$ l'ensemble des barycentres de A et on dira que A est convexe si $\Gamma(A) = A$.

Si E est un espace vectoriel de dimension finie, et si p est une norme sur E, on définit une norme p^* sur le dual E^* de E en posant

$$p^*(\lambda) = \operatorname{Sup} \{ |\lambda(a)| ; a \in E, p(a) \leqslant 1 \}$$

pour $\lambda \in E^*$; on dit que la norme p est euclidienne si la fonction q définie sur E par $q(a) = [p(a)]^2$ pour $a \in E$, est une forme quadratique définie positive.

On rappelle que dans un espace vectoriel normé E de dimension finie, toute suite bornée possède une sous-suite convergente dans E.

A

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n, $n \geqslant 1$, muni d'une norme p.

I. 1° Établir que pour toute partie non vide A de E, $\Gamma(A)$ est convexe.

I. 2° Montrer qu'un point $a \in E$, barycentre d'une partie finie A de E ayant r éléments distincts avec $r \geqslant n + 2$, est aussi barycentre d'un sous-ensemble de A ayant $r - 1$ éléments.

I. 3° En déduire que si A est une partie non vide de E, pour tout $a \in \Gamma(A)$, il existe $(a_1, \ldots, a_{n+1}) \in A^{n+1}$, $(\theta_1, \ldots, \theta_{n+1}) \in \mathbb{R}_+^{n+1}$ tels que :

$$a = \sum_{i=1}^{n+1} \theta_i a_i \qquad \text{et} \qquad \sum_{i=1}^{n+1} \theta_i = 1.$$

I. 4° En déduire que si A est une partie fermée bornée et non vide de E, $\Gamma(A)$ est aussi fermée et bornée.

II. 1° Montrer que pour toute partie fermée non vide B de E, et tout $a \in E$, il existe $b_0 \in B$ tel que :

$$p(a - b_0) = \operatorname{Inf} \{ p(a - b) ; b \in B \} .$$

II. 2° Supposant de plus B convexe, p euclidienne et $a \notin B$, montrer, en considérant pour $b \in B$ la fonction $t \longmapsto [p(a - tb - (1 - t) b_0)]^2 : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$, qu'il existe une forme linéaire $\lambda \in E^*$ telle que :

$$\lambda(a) > \operatorname{Sup} \{ \lambda(b) ; b \in B \} .$$

II. 3° On ne suppose plus nécessairement p euclidienne. Soit C une partie fermée non vide de E^* (muni de p^*) contenue dans $B^* = \{ \lambda \in E^* ; p^*(\lambda) \leqslant 1 \}$; montrer que si pour tout $a \in E$, on a : $p(a) = \operatorname{Sup} \{ \lambda(a) ; \lambda \in C \}$, alors toute forme linéaire $\lambda \in B^*$ est barycentre d'une partie de C ayant au plus $n + 1$ éléments.

B

Soit I un intervalle compact non vide de $\mathbb{R}$; on désigne par $\mathcal{C}(I ; \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions numériques continues sur I muni de la norme p_0 obtenue en posant $p_0(f) = \operatorname{Sup} \{ |f(x)| ; x \in I \}$, pour toute f appartenant à $\mathcal{C}(I ; \mathbb{R})$.

Pour $x \in I$, $f \in \mathcal{C}(I ; \mathbb{R})$, on pose $\varepsilon_x(f) = f(x)$ et si E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(I ; \mathbb{R})$, on désigne par ε_x^E la restriction de ε_x à E.

Soit H un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(I ; \mathbb{R})$ de dimension finie $n \geqslant 1$; on munit H de la norme p restriction de p_0 à H.

I. 1° Montrer que l'ensemble $\{ \varepsilon_x^H ; x \in I \}$ est fermé et borné dans H^* (muni de p^*).

I. 2° En déduire que pour tout $\lambda \in H^*$ avec $p^*(\lambda) \leqslant 1$, il existe $k \in \mathbb{N}$, $k \leqslant n$, une suite finie $(x_1, \ldots, x_{k+1})$ de $k + 1$ éléments distincts de I et $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{k+1}) \in \mathbb{R}^{k+1}$ tels que

$$\lambda = \sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i \varepsilon_{x_i}^H \qquad \text{avec} \qquad \sum_{i=1}^{k+1} |\alpha_i| \leqslant 1 .$$

.../...

E.N.S. FONTENAY ET ST-CLOUD 1980 (maths II)
- 16 -

II. On considère dans cette partie les deux propriétés suivantes :

(P_1) pour toute $g \in \mathcal{C}(I ; \mathbb{R})$ il existe une *unique* fonction $h_0 \in H$ telle que :

$$p_0(g - h_0) = \text{Inf}\{p_0(g - h) ;\ h \in H\} ;$$

(P_2) toute fonction $h \in H$ s'annulant au moins n fois sur I est identiquement nulle sur I.

II. 1° Soient $x_1, \ldots, x_n$ n points distincts de I et φ l'application linéaire de H dans $\mathbb{R}^n$ définie par $\varphi(h) = (h(x_1), \ldots, h(x_n))$.

Montrer que le système $\{\varepsilon^H_{x_1}, \ldots, \varepsilon^H_{x_n}\}$ est libre dans H^* si et seulement si φ est injective.

En déduire que (P_2) équivaut à l'assertion suivante : pour toute suite finie $(x_1, \ldots, x_k)$ de k points distincts de I, $k \leqslant n$, le système $\{\varepsilon^H_{x_1}, \ldots, \varepsilon^H_{x_k}\}$ est libre dans H^*.

II. 2° *a*. Soit $g_0 \in \mathcal{C}(I ; \mathbb{R})$ tel que $p_0(g_0) = 1$ et $\text{Inf}\{p_0(g - h) ; h \in H\} = 1$. Soit $h_0 \in H$ tel que $p_0(g_0 - h_0) = 1$. On désigne par $F = \{h + t g_0 ; h \in H, t \in \mathbb{R}\}$ l'espace vectoriel engendré par H et g_0 et par λ, la forme linéaire définie sur F par : pour tout $t \in \mathbb{R}$, pour tout $h \in H$, $\lambda(h + t g_0) = t$.

En appliquant le B.I.2° à F et λ, montrer qu'il existe une suite $(x_1, \ldots, x_k)$ de k points distincts de I telle que le système $\{\varepsilon^H_{x_1}, \ldots, \varepsilon^H_{x_k}\}$ soit lié dans H^* et telle que $h_0(x_i) = 0$ pour $i = 1, \ldots, k$.

b. Soient $g \in \mathcal{C}(I ; \mathbb{R})$ avec $g \notin H$ et h_1 et h_2 deux éléments de H tels que $p_0(g - h_i) = \text{Inf}\{p_0(g - h) ; h \in H\}$, $i = 1, 2$.

On pose :

$$g_0 = \frac{g - h_1}{p_0(g - h_1)} \qquad \text{et} \qquad h_0 = \frac{h_2 - h_1}{p_0(g - h_1)}.$$

Montrer que si l'espace vectoriel H vérifie la propriété (P_2), la fonction h_0 est identiquement nulle sur I.

c. En déduire que (P_2) implique (P_1).

II. 3° *a*. Soit $h_0 \in H$ s'annulant en n points distincts $x_1, \ldots, x_n$ de I et telle que $p_0(h_0) = 1$.

1. Montrer qu'il existe $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varepsilon^H_{x_i} = 0$ dans H^* et $\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| = 1$.

2. Construire une fonction $g_1 \in \mathcal{C}(I ; \mathbb{R})$ avec $p_0(g_1) = 1$ et telle que, pour $i = 1, \ldots, n$ avec $\alpha_i \neq 0$, $g_1(x_i) = \dfrac{\alpha_i}{|\alpha_i|}$.

En déduire que pour tout $h \in H$, $1 \leqslant p_0(g_1 - h)$.

3. Soient g_2 et g_0 les fonctions de I dans $\mathbb{R}$ définies par : pour tout $x \in I$ $g_2(x) = \text{Min}(1 + h_0(x), g_1(x))$ et $g_0(x) = \text{Max}(h_0(x) - 1, g_2(x))$.

Montrer que g_2 et g_0 appartiennent à $\mathcal{C}(I ; \mathbb{R})$ et que :

$$1 = p_0(g_0) = p_0(g_0 - h_0) = \text{Inf}\{p_0(g_0 - h) ; h \in H\}$$

b. En déduire que (P_1) implique (P_2).

III. Soient a et b deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$; on considère l'équation différentielle linéaire : pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$(*) \qquad y''(x) + a(x)\, y'(x) + b(x)\, y(x) = 0.$$

Montrer que pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, on peut trouver un intervalle fermé borné $I = [\alpha, \beta]$, avec $\alpha < x_0 < \beta$, tel que l'ensemble H des restrictions à I des solutions de (*) vérifie (P_2) avec $n = \dim H$.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail